Propagación y Transmisión de Ondas: Apuntes de Acústica

Javier Artiga Garijo

Curso 2015/16



Ondas Acústicas

1 La ecuación de onda acústica en tres dimensiones

1.1 Introducción

Onda acústica: perturbación de presión que se puede propagar a través de un fluido compresible. Es una onda longitudinal (propagación en la dirección del movimiento de la partícula).
Partícula del medio (dV): suficientemente grande para contener partículas reales (medio continuo), pero suficientemente pequeña para que las variables acústicas sean constantes en todo el elemento.

Variables:

- $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ densidad instantánea (la densidad de equilibrio es constante).
- $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ condensación (magnitud adimensional, muy pequeña).
- $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ velocidad de partícula del fluido.
- $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ presión total instantánea (la P_0 total de equilibrio es constante, a nivel del mar $\simeq 10^5$ Pa).
- $\beta = \rho_0 \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}$ módulo adiabático de volumen (por ejemplo, $\beta_{\text{agua}} = 10^{12}$, $\beta_{\text{aire}} = 10^5$).

  Análogo a la K de un muelle: resistencia a la compresión
- $\mathbf{c}$ velocidad de fase de la onda.

Asumimos las siguientes hipótesis sobre el medio:

1. Ausencia de efectos gravitacionales (ρ_0 y P_0 constantes).
2. Fluido homogéneo, isótropo y perfectamente elástico.
3. Medio no disipativo (viscosidad nula).
4. Cambios de densidad pequeños $|s| \ll 1$, es decir, acústica lineal.

1.2 Ecuación de estado

Ecuación de estado de un gas ideal en un proceso adiabático (sin intercambio calorífico):

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \ldots \text{(desarrollo en serie de } \frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \text{ con } \gamma = \frac{C_P}{C_V}\text{)}$$

$$P - P_0 \simeq \beta \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \text{ es decir,}$$

$$\boxed{\mathbf{p} = \beta \cdot \mathbf{s}} \quad \textit{(análogo a } F = k \cdot x \textit{ del muelle)}$$

1.3 Ecuación de continuidad

Es una propiedad general que relaciona el movimiento del fluido con sus compresiones. Suponiendo un pequeño volumen τ en una superficie S, la masa del fluido en τ es $m = \int_\tau \rho dV$, y su variación es
$\frac{\partial m}{\partial t} = \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \underbrace{-\int_S \rho \cdot \vec{u} dS}_{\text{flujo neto}} \underset{\text{por T}^{\text{a}}\text{ Gauss } \int_\tau \nabla(\rho\vec{u})dV}{=\!=\!=} -\int \nabla \cdot (\rho\vec{u})dV$, de donde se deduce $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{u}) = 0$.

Esta es una ecuación no lineal, porque aparece el producto de dos variables acústicas distintas (densidad y velocidad de partículas). Sustituyendo ρ por $\rho_0(1+s)$ y asumiendo que $|s| \ll 1$ y $\nu p \ll \nabla \cdot \vec{u}$, la linealizamos como

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{t}} + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}}$$

1.4 Ecuación de Euler

Es la aplicación de la segunda ley de Newton para medios continuos.
Considerando un elemento de fluido $dV = dxdydz$, de masa variable $dm = \rho dV$, la fuerza sobre el mismo, debida a la diferencia de presiones, viene dada por $df_x = [P - P(+\frac{\partial P}{\partial x}dx)]dydz = -\frac{\partial P}{\partial x}dV$. Obteniendo las ecuaciones análogamente en los otros dos ejes ortogonales, tenemos

$$d\vec{f} = df_x\vec{i} + df_y\vec{j} + df_z\vec{k} = -\nabla P \cdot dV$$

La aceleración es la variación no sólo temporal, sino también espacial, del tiempo (ya que el elemento se desplaza por el fluido), lo que da lugar a la componente convectiva de la aceleración. La aceleración puede escribirse como $\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\nabla)\vec{u}$. Asumiendo que $|s| \ll 1$ y $(\vec{u}\nabla)\vec{u} \ll |\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}|$ (despreciando la componente convectiva), y como $\nabla P = \nabla p$, tenemos

$$\boxed{\rho_\mathbf{0}\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{t}} \simeq -\nabla \mathbf{p}} \; (\textit{análogo a } m \cdot \tilde{a} = \tilde{F})$$

1.5 Ecuación de onda acústica

Tomando el gradiente de la ecuación de Euler, obtenemos $\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\vec{u}) = -\nabla^2 p$. Despejando $\nabla\vec{u}$ de la ecuación de continuidad y sustituyéndola en la anterior, llegamos a que $-\rho_0\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\nabla^2 p$. Finalmente, utilizando la ecuación de estado, llegamos a:

$$\boxed{\nabla^\mathbf{2}\mathbf{p} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}} \cdot \frac{\partial^\mathbf{2}\mathbf{p}}{\partial \mathbf{t^2}}}, \text{ donde } c = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$$

1.6 Velocidad de propagación

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

En el caso del aire, $\gamma = 1,4$, $P_0 = 1,013 \cdot 10^5$Pa, $\rho_0 = 1,29$kg/m^3 $\Rightarrow c = 332$m/s (con T=0 ºC)

Problemas Tema 1: La ecuación de onda acústica en tres dimensiones

1. A partir de $\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$, mostrar que $\frac{\partial P(\rho_0)}{\partial \rho} = \frac{\gamma P}{\rho_0}$

$$\beta = \rho_0 \frac{\partial P(\rho_0)}{\partial \rho} = \rho_0 P_0 \gamma \left(\frac{\gamma P}{\rho_0}\right)^{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho}{\cancel{\rho_0}} \frac{\cancel{\rho_0}}{\rho} = \rho_0 \gamma P \frac{1}{\rho} \underset{\rho \simeq \rho_0}{\simeq} \gamma P_0$$

2. Obtener la ecuación de continuidad igualando el flujo neto a través de un elemento fijo de volumen $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ con la variación de la masa en su interior.

3. Integrando la ecuación de continuidad linealizada, obtener que $s = -\nabla \xi$ (es decir, la condensación es, cambiada de signo, la divergencia del desplazamiento de partícula).

$$\int \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \vec{U}\right) dt = S + \nabla \int \frac{\partial \xi}{\partial t} dt = S + \nabla \xi = 0 \Rightarrow S = -\nabla \xi$$

4. Demostrar que para un elemento de fluido que se mueve con el mismo,

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$$

5. A partir de $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ y de la ecuación de los gases ideales ($PV = nRT$), mostrar que $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$. ¿Conoces algún fenómeno en donde se ponga de manifiesto la dependencia de la velocidad del sonido con la temperatura?

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma n R T_0}{\rho_0 V_0}} = \sqrt{\frac{\gamma \cancel{n} R T_0}{\cancel{P_0} M \cancel{V_0}}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \Rightarrow c = \text{cte} \cdot \sqrt{T}$$

Aunque es una diferencia sutil, cogiendo aire caliente para hablar la voz sale algo más aguda. En los instrumentos musicales es más apreciable (con el calor, la afinación sube).

6. Para una onda plana: $\vec{u} = Ue^{j(wt-kx)}\vec{i}$ (donde U, w, k son constantes mostrar que $\frac{|(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}|}{|\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}|} = \frac{U}{c}$. Al cociente $\frac{U}{c}$ se le denomina **número de Match**, con el que se justifica la aproximación a la ecuación de Euler.

$$\frac{ue^{j(wt-kx)}\frac{\partial}{\partial x}[ue^{j(wt-kx)}]}{jwue^{j(wt-kx)}} = \frac{|(-jk)u^2e^{2j(wt-kx)}|}{|jwue^{j(wt-kx)}|} \underset{|e^{jw}|=1}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{U}{c}$$

7. Encontrar que la solución general de la ecuación $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ (utilizando las nuevas variables $r = x - ct$ y $s = x + ct$) se puede escribir como $p(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$. Esta es la solución general para *ondas planas* y al método utilizado se le conoce como método de d'Alembert.

8. Probar que las funciones de la forma $F(x-ct)$ y $G(x+ct)$ representan funciones arbitrarias que se desplazan con velocidad c a derecha e izquierda (respectivamente) del eje x. Para ello, comprobar que el valor que toma la función F en el punto $x_0 + ct$ en el tiempo t coincide con el valor de la función en el punto x_0 en un tiempo t anterior.

9. Admitiendo que $P(x,y,z,t) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)\cdot T(t)$, hallar la solución de la ecuación de onda en tres dimensiones. Aplicar las condiciones de entorno existentes en una habitación paralelepípeda de paredes rígidas y dimensiones L_1, L_2, L_3 para encontrar los modos normales y frecuencias propias de oscilación de la onda acústica en el interior del recinto.

$$YZT\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZT\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XYT\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + XYT\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}XYZ\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + XYT\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

sólo se cumple si es una constante: $-K^2$

$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + c^2K^2 t = 0$

$T(t) = A\sin(cKt) + B\cos(cKt)$ Las constantes verifican $K^2 = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2$

$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + K^2 x = 0$

$X(t) = A_1\sin(cK_1 t) + B_1\cos(cK_1 t)$ Análogo para $Y(t)$, $Z(t)$

Condiciones de frontera:

$$\begin{cases} u_x = 0 & \text{en } x = 0 \quad \wedge \quad x = L_1 \\ u_y = 0 & \text{en } y = 0 \quad \wedge \quad y = L_2 \\ u_z = 0 & \text{en } z = 0 \quad \wedge \quad z = L_3 \end{cases}$$

$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ en $x = 0$

$\frac{\partial P(0)}{\partial x} = (K_1A_1\cos(K_1x) - \underbrace{K_1B_1\sin(K_1x)}_{\sin(0)=0})[\ldots] = 0 \Rightarrow A_1 = 0$ y análogamente, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$

$$\boxed{P(x,y,z,t) = \cos(K_1x)\cos(K_2y)\cos(K_3z)[C\sin(cKt) + D\cos(cKt)]}$$

$u_x = 0, x = L_1 \rightarrow \frac{\partial P(L_1)}{\partial x} = \overbrace{-K_1\sin(K_1L_1)}^{\cos'(K_1x)}[\ldots] = 0 \rightarrow \sin(K_1L_1) = 0 \rightarrow K_1L_1 = l\pi;$

$$K_1 = l\frac{\pi}{L_1},\ K_2 = m\frac{\pi}{L_2},\ K_3 = n\frac{\pi}{L_3} \quad l = 0,1,2,\ldots,\ m = 0,1,2,\ldots,\ n = 0,1,2,\ldots$$

$K = \frac{w}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}$

$$\boxed{f = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{l}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_3}\right)^2}}$$

Ejemplo: 17 m $= \frac{\lambda}{2}$

$c = 340\ \frac{c}{\lambda} = f = 10$ Hz $\rightarrow$ Bajas frecuencias restringidas a mínimo 10 Hz

10. Partiendo de la ecuación de Euler, mostrar que $\nabla\times\vec{u} = 0$ y, por tanto, existe un potencial de velocidades ϕ tal que $\vec{u} = \nabla\phi$

2 Soluciones simples de la ecuación de ondas. Impedancia acústica

2.1 Ondas acústicas planas

La solución más simple de la ecuación de ondas se obtiene cuando todas las variables acústicas son función de una única coordenada espacial (constantes a lo largo de un plano):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c} = \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \text{cuya solución general es: } p(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$

donde F y G son funciones arbitrarias.
Tomando la solución armónica, de pulsación ω y número de onda k, obtenemos

$$p(x,t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)} \text{ donde, en general, p, A y B son valores complejos}$$

Partiendo de la ecuación de Euler, podemos obtener la velocidad de partícula $\vec{u}(x,t) = \left[\frac{A}{\rho_0 c}e^{j(\omega t - kx)} - \frac{B}{\rho_0 c}e^{j(\omega t + kx)}\right]\vec{i}$, es decir, esencialmente

$$u = \frac{p}{\rho_0 c}$$

con signo + si la onda va hacia la derecha y signo - si la onda va hacia la izquierda.

2.2 Ondas acústicas esféricas

Tendremos ondas esféricas si las ondas poseen simetría radial, $p(r,t) = \frac{A}{r}e^{j(\omega t - kr)}$. El operador Laplaciano se reduce, en coordenadas esféricas, a $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$, de manera que la ecuación de ondas resulta:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Con el cambio de variable $p \to rp$ tenemos:

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2}$$

con solución armónica:

$$rp(r,t) = Ae^{j(\omega t - kr)} + Be^{j(\omega t + kr)}$$

Para obtener la velocidad de partícula, usamos la ecuación de Euler en la parte divergente de la solución, que es $p(r,t) = \frac{A}{r}e^{j(\omega t - kr)}$, y tenemos:

$$u(r,t) = \left(1 - \frac{j}{kr}\right)\frac{p}{\rho_0 c}$$

2.3 Impedancia acústica

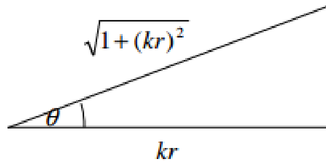
Es un concepto análogo a la impedancia de un oscilador armónico (fuerza/velocidad). Para las ondas planas,

$$z = \pm\rho_0 c$$

Sin embargo, la impedancia es, en general, compleja: $z = r + jx$, donde r es la resistencia acústica específica y x es la reactancia acústica específica, ambos dependientes del medio y del tipo de onda.
Para ondas esféricas, la impedancia se calcula a partir de las ecuaciones de p y u. Se obtiene:

$$z = \rho_0 c \left(\frac{(kr)^2}{1+(kr)^2} + j\frac{kr}{1+(kr)^2} \right)$$

Con la representación:



Podemos escribir $z = \rho_0 c \frac{kr}{\sqrt{1+(kr)^2}} e^{j\phi}$

o bien, $z = \rho_0 c \cos(\phi) e^{j\phi}$

2.4 Densidad de energía

La energía transportada por ondas acústicas lo es de dos formas: cinética, debida al movimiento del fluido, y potencial, debida a la compresión del mismo. No profundizaremos más porque no es una magnitud necesaria para esta asignatura.

2.5 Intensidad acústica

La intensidad acústica de una onda sonora es la rapidez del flujo de energía a través de un área unitaria normal a la dirección de propagación y se mide en Wm^{-2}. Puesto que la rapidez con que un elemento de fluido hace trabajo por unidad de área es $p \cdot u$, tenemos que:

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T pudt$$

ecuación que, para ser evaluada, requiere conocer la relación entre p y u.

Tomando el valor eficaz de $I = \frac{1}{2}\rho_0 c U_0^2 = \frac{1}{2}P_0 U_0 = \frac{1}{2}\frac{P_0^2}{\rho_0 c} = \frac{P_e^2}{\rho_0 c}$ para ondas planas,

$$P_e = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T p^2 dt}$$

El resultado para ondas esféricas es formalmente idéntico:

$$I = \frac{1}{2}P_0 U_0 \cos(\phi) = \frac{P_0^2}{2\rho_0 c}$$

donde $\cos(\phi)$ es análogo al factor de potencia de un circuito de corriente alterna. De aquí se deduce que para ondas planas P_0 es constante en todo el espacio de propagación, mientras que para ondas esféricas P_0 corresponde al punto y decrece con la distancia como $1/r$.

Problemas Tema 2: Soluciones simples de la ecuación de ondas. Impedancia acústica

1. Obtener la expresión para la velocidad de partícula en ondas esféricas, a partir de la expresión de la presión acústica en ondas esféricas, y la ecuación de Euler.

2. Obtener la expresión de la intensidad acústica para ondas esféricas, por integración de $I = \frac{1}{T}\int_{<T>} p \cdot u dt$ la tomando el producto $\text{Re}(p) \cdot \text{Re}(u)$, comprobando previamente que $\text{Re}(p) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr)$ y que $\text{Re}(u) = \frac{A}{\rho_0 cr\cos(\phi)}\cos(\omega t - kr - \phi)$

3. Hallar el máximo valor de la reactancia acústica específica. ¿A qué distancia de la fuente se obtiene? Representar la resistencia y reactancia acústicas específicas en función de kr.

4. Una onda esférica divergente de 1 kHz tiene un pico acústico de presión igual a 2 Nm^2 a una distancia de 1 metro de la fuente. Hallar: a) Velocidad de partícula, b) Desfase entre presión y velocidad, c) Desplazamiento de partícula, d) Intensidad, e) Potencia acústica de la fuente.

   $P = I \cdot S = \frac{P_0^2}{2\rho_0 c_0}4\pi r^2 = \frac{4}{2 \cdot 415}4\pi r^2 = \frac{16\pi}{830}$ W

   $I = \frac{1}{2}\rho_0 u_0 \cos(\phi)$; $u_0 = \frac{2\frac{4}{2\cdot 415}}{2\cos(\phi)}$ $\qquad \phi = \text{arctg}\frac{1}{\sqrt{1+(kr)^2}}$

5. Dada una fuente de ondas acústicas esféricas en el aire, calcular para una distancia radial de 10 cm, la diferencia de fase entre la presión y la velocidad de la partícula a las frecuencias de 10, 100 y 1000 Hz. De igual manera, calcular en estas condiciones el módulo de la impedancia acústica específica. Finalmente, calcular para cada una de las frecuencias a partir de qué distancia el desfase entre la presión y la velocidad es menor de 0,01 radianes.

3 Sonido y audición. Medida del sonido: dB y dBA

3.1 Características de la audición humana

3.2 Sonido y niveles sonoros. NPS, NIS, NWS

Los humanos juzgamos la sonoridad relativa de dos sonidos no de forma lineal, sino por el logaritmo de su relación de intensidades, de acuerdo con la ley psico-física de Weber-Fechner, la cual conecta la respuesta (S) con los estímulos (R), para sistemas biológicos, en la forma $S = K \log R$. A fin de trabajar con magnitudes adimensionales para la sensación así como para ajustar el 'cero' de sensación con el umbral del estímulo, conviene escribir la fórmula anterior como

$$\textit{'nivel de sensación sonora'} = k \log \frac{R}{R_{ref}}, \qquad \text{donde } R_{ref} \text{ es el estímulo umbral de referencia ('cero' de sensación)}$$

Con $k = 1$, los valores obtenidos se expresan en *'belios'*. Por ejemplo, una intensidad de 10^{-4} Wm^{-2} respecto al valor umbral de audición a $f = 1$kHz (10^{-12} Wm^{-2}) se traduce en una sensación de $NIS = 8$ belios, y el rango de estímulos de 10^{14} se transforma en un rango de 14 belios.
Nuestra discriminación en niveles de sensación es, aproximadamente, la décima parte del bel. Por ello, se toma $k = 10$, obteniéndose sensaciones en *decibelios* (dB):

$$\boldsymbol{NIS} = 10 \cdot \log \frac{I}{I_{ref}} \text{ (en dB)}$$

Tomando las referencias $P_{ref} = 20\mu$ Pa; $I_{ref} = 10^{-12}$ Wm^{-2} y $W_{ref} = 10^{-12}$ W, se definen también los niveles sonoros de presión y potencia:

$$\boldsymbol{NPS} = 10 \cdot \log \frac{P^2}{P_{ref}^2} = 20 \cdot \log \frac{I}{I_{ref}} \text{ (en dB)}$$

$$\boldsymbol{NWS} = 10 \cdot \log \frac{W}{W_{ref}} \text{ (en dB)}$$

3.3 Ponderación temporal

Antes se usaba la ponderación temporal en lugar de la del nivel sonoro en el tiempo, con sistemas distintos y respuestas de diferentes velocidades (Slow, Fast, Impulse y Peak).

3.4 Banda de octava y tercio de octava

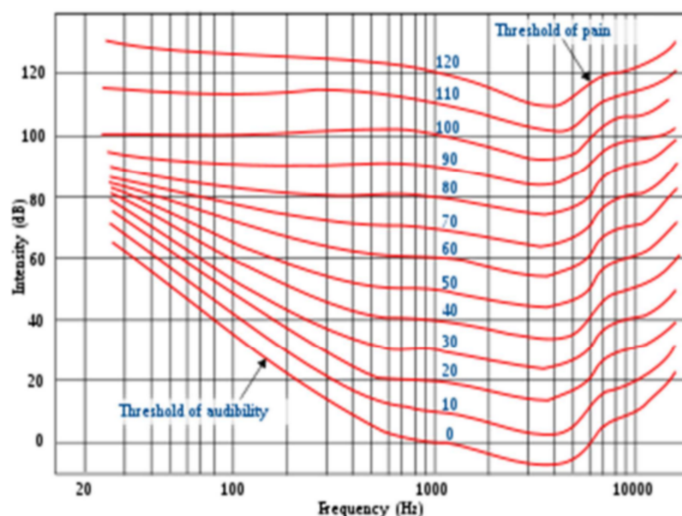
En acústica, es frecuente realizar los análisis espectrales bien en bandas de octava, bien en bandas de tercio de octava. Esta es una forma de dividir el espectro audible (20 Hz - 20 kHz) en rangos similares a como se hace en notación musical. Partiendo de una frecuencia central (1 kHz) se definen los centros del resto de bandas dividiendo y multiplicando, consecutivamente, por 2. Así aparecen las bandas de

$$16 - 31,5 - 63 - 125 - 250 - 500 - 1.000 - 2.000 - 4.000 - 8.000 \text{ y } 16.000 \text{ Hz}$$

El ancho de cada banda abarca una octava musical, es decir, se extiende desde $f_{inf} = \frac{f_c}{\sqrt{2}}$ hasta $f_{sup} = f_c \cdot \sqrt{2}$. Cuando se requiere análisis espectral más fino se recurre a bandas de tercio de octava. Es un procedimiento análogo, pero cada banda de octava se divide en 3 de tercio de octava, hallando los centros de banda por múltiplos de $2^{1/3}$. Ahora el ancho de cada banda va desde $f_{inf} = \frac{f_c}{2^{1/6}}$ hasta $f_{sup} = f_c \cdot 2^{1/6}$.

3.5 Redes de ponderación. dBA y dBC. Leq

El oído no es igualmente sensible a todas las frecuencias. Por esta razón, aunque el nivel de presión sonora de dos sonidos distintos sea el mismo, el primero puede juzgarse como *más intenso* que el segundo *si el nivel de presión sonora* del primero *está concentrado en una región de frecuencias donde el oído es más sensible*. Así, el nivel de presión sonora no es una medida de la sonoridad. Un tono de 1 KHz con un nivel de presión sonora de 40 dB es igual, en sonoridad, a un tono puro de 125 Hz con un nivel de presión sonora de 56 dB. La sensibilidad es superior en la zona central (1 a 5 KHz) que en las bajas y altas frecuencias, donde la sensibilidad es muy inferior.



Curvas isófonas de Fletcher-Munson

Las redes de ponderación A y C efectúan correciones sobre las diferentes bandas de tercio de octava. Aunque los niveles así expresados reproducen la sensibilidad del oído humano, esta forma de medir es objetiva totalmente. La red de ponderación A (la más usada) se corresponde con la inversa de la isófona de 40 fonios.

Freq. (Hz)	Pond.A (dB)	Pond.C (dB)	Freq. (Hz)	Pond. A (dB)	Pond.C (dB)
10	-70,4	-14,3	**500**	**-3,2**	**0**
12,5	-63,4	-11,2	630	-1,9	0
16	**-56,7**	**-8,5**	800	-0,8	0
20	-50,5	-6,2	**1000**	0,0	0
25	-44,7	-4,4	1250	+0,6	0
31,5	-39,4	-3,0	1600	+1,0	-0,1
40	-34,6	-2,0	**2000**	+1,2	-0,2
50	-30,2	-1,3	2500	+1,3	-0,3
63	-26,2	-0,8	3150	+1,2	-0,5
80	-22,5	-0,5	**4000**	+1,0	-0,8
100	-19,1	**-0,3**	5000	+0,5	-1,3
125	-16,1	-0,2	6300	-0,1	-2,0
160	-13,4	-0,1	**8000**	-1,1	-3,0
200	-10,9	**0**	10000	-2,5	-4,4
250	-8,6	0	12500	-4,3	-6,2
315	-6,6	0	**16000**	-6,6	-8,5
400	-4,8	0	20000	-9,3	-11,2

Ponderación del nivel sonoro en el tiempo

Para ponderar la variabilidad del nivel sonoro en el tiempo, las medidas se suelen expresar como promedio energético, mediante el denominado Nivel Sonoro Continuo Equivalente, L_{eq}. Cuando la ponderación usada es la de la red A, el nivel equivalente se expresa como $L_{\text{A eq}}$:

$$L_{\text{A eq}} = 10 \log \frac{1}{T} \int_0^T 10^{L_A(t)/10} dt$$

$$i(t) = 10 \log \frac{I}{I_{\text{ref}}} \Rightarrow \frac{i(t)}{10} = \log \frac{I}{I_{\text{ref}}} \Rightarrow \boxed{I_{\text{ref}} 10^{i(t)/10} = I}$$

Esto es, claramente, un promedio energético (expresado en dB) de la onda acústica, y no un promedio de los niveles sonoros. Por tanto, se trata de un promediado logarítmico.
Como ejemplo, supongamos que queremos evaluar el $L_{\text{A eq}}$ de un ruido de 90 dB de nivel sonoro y de otro de 70 dB, ambos de la misma duración t. El resultado será:

$$L_{\text{A eq}}(2t) = 10 \log \frac{1}{2t} \left[\left(10^{90/10} t + 10^{70/10} t \right) \right] \simeq 10 \log \frac{1}{2} [10^9] \simeq 10(0,3) + 10(9) \simeq 87 \text{ dB}$$

Es destacable el hecho de que superar el nivel establecido en 3 dB es duplicar el límite.

Problemas Tema 3: Sonido y audición. Medida del sonido: dB y dBA

1. El análisis espectral de un ruido constata que posee componentes en las bandas de octava de 125 Hz (52 dB), 500 Hz (47 dB) y 2 kHz (39 dB). Hallar su nivel sonoro global (en banda ancha) sin ponderar (dB) y con ponderaciones A (dBA) y C (dBC).

2. Mostrar que:

   (a) NPS re 1 µPa = NPS re 1 µbar + 100

   $$X = 20\log\frac{1\mu\text{bar}}{1\mu\text{Pa}} = 20\log\frac{10^{-1}\text{Pa}}{10^{-6}\text{Pa}} = 100$$

   (b) NPS re 20 µPa = NPS re 1 Pa + 94

   $$X = 20\log\frac{1\text{Pa}}{2\cdot 10^{-5}\text{Pa}} = 20\log\frac{10^5}{2} = 100 - 6 = 94$$

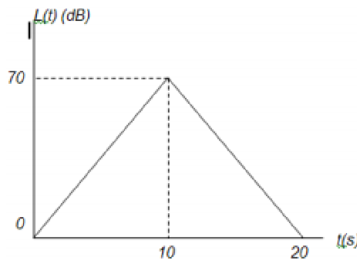
   $$\text{NPS}_{\text{ref}}\zeta = \text{NPS}_{\text{ref}}\xi + X$$

   $$20\log\frac{P}{\zeta} = 20\log\frac{P}{\xi} + X$$

   $$X = 20\log\tfrac{P}{\zeta} - 20\log\tfrac{P}{\xi} = 20\log\tfrac{\frac{P}{\zeta}}{\frac{P}{\xi}} = 20\log\tfrac{\xi}{\zeta}$$

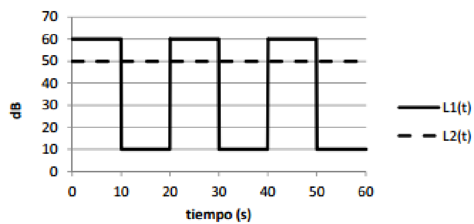
3. Durante una hora se tuvo un NPS constante de 60 dB. Durante la siguiente hora, el NPS fue constante, de valor 63 dB. La siguiente hora, el NPS fue de 40 dB. ¿Cuánto vale el nivel sonoro continuo equivalente durante las 3 horas?

4. La huella sonora dejada por el paso de un vehículo es la mostrada en la figura. Hallar el nivel Leq de los 20 segundos.

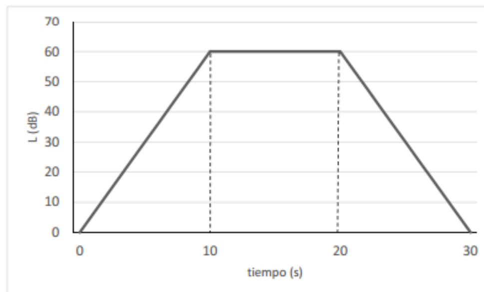


5. Supongamos que nos dan los niveles sonoros de un ruido en las bandas de tercio de octava de 100 Hz (46 dB), 125 Hz (53 dB) y 160 Hz (41 dB). ¿Podemos calcular el nivel sonoro en la banda de octava de 125 Hz?. Si el valor que nos dan es el nivel en la banda de octava de 125 Hz (54 dB, por ejemplo), ¿Podemos saber el nivel en las bandas de tercio de octava de 100, 125 y 160 Hz?

6. ¿Cuál de los dos sonidos posee mayor Leq durante los 60 s?. Justificar la respuesta.



7. Hallar el Leq del evento durante los 30 segundos.

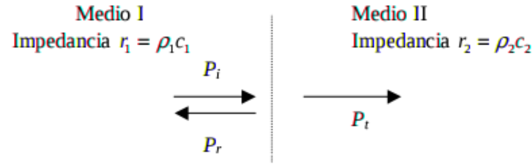


4 Reflexión, transmisión y absorción de ondas acústicas

4.1 Reflexión y transmisión

4.1.1 Cambio de medio

Cuando una onda acústica que viaja en un medio encuentra la frontera de un segundo medio, se generan ondas reflejadas y transmitidas. Suponemos que tanto las ondas como las fronteras son planas y que la incidencia es normal a la superficie de separación, además de que los medios I y II son infinitos a izquierda y derecha, respectivamente.



En notación compleja, las ondas incidente, reflejada y transmitida son

$$p_i = P_i e^{j(\omega t - k_1 x)} \qquad p_r = P_r e^{j(\omega t + k_1 x)} \qquad p_t = P_t e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

En estas expresiones se comprueba que la frecuencia de onda f no se modifica, de acuerdo con lo que hemos supuesto y con lo experimentado en fenómenos ópticos. Sin embargo, al ser la velocidad de propagación diferente en ambos medios, el número de ondas k sí cambia.
Se definen las magnitudes:

- Coeficiente de reflexión de amplitud de presión

$$R \equiv \frac{P_r}{P_i} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2}$$

- Coeficiente de transmisión de amplitud de presión

$$T \equiv \frac{P_t}{P_i} = \frac{2r_2}{r_1 + r_2}$$

- Coeficiente de reflexión de intensidad

$$R_I \equiv \frac{I_r}{I_i} = R^2$$

- Coeficiente de transmisión de intensidad

$$T_I \equiv \frac{I_t}{I_i} = \frac{4r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2}$$

Los coeficientes de intensidad se obtienen de los de presión, ya que $I = \frac{P^2}{2r}$. Por eso, desarrollando podemos llegar a expresar $R_I = |R|^2$ y $T_I = \frac{r_1}{r_2}|T|^2$.

Ahora pasamos ya a evaluar en el cambio de medio los coeficientes de reflexión y transmisión. Las dos condiciones que deben cumplirse en la frontera (x=0) son:

a) $p_i + p_r = p_t$ en $x = 0$

b) $u_i + u_r = u_t$ en $x = 0$

Al dividir estas expresiones comprobamos que también se mantiene la continuidad de la impedancia acústica específica normal a través de la frontera. Operando y resolviendo para R y después para T obtenemos de nuevo las expresiones de estos coeficientes que teníamos en el medio I.
Las consecuencias más destacables de estos resultados son:

- $r > 0 \Rightarrow$ Onda transmitida en fase con onda incidente
- $R > 0 \Rightarrow r_2 > r_1 \Rightarrow$ Sin cambios en fase
- $R < 0 \Rightarrow r_2 < r_1 \Rightarrow$ Desfase de π, $T \simeq 2$
- $r_2 \gg r_1 \Rightarrow R \simeq -1$, $T \simeq 0$

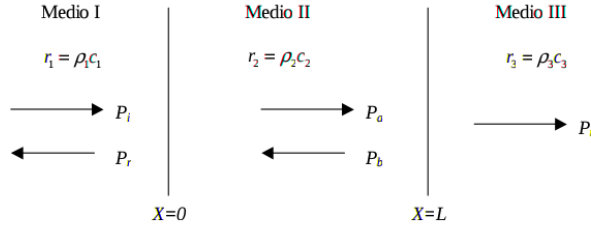
Se puede comprobar fácilmente que las relaciones entre las velocidades de partículas son

$$\frac{u_r}{u_i} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \qquad \frac{u_t}{u_i} = \frac{2r_1}{r_1 + r_2}$$

Como vemos, los coeficientes de reflexión de velocidad y de presión son iguales en módulo pero de signo opuesto. Esto implica que, para la reflexión, cuando no hay cambio de fase en la presión, lo hay en la velocidad de partícula (y desplazamiento de partícula) y viceversa.

4.1.2 Transmisión a través de una capa (incidencia normal)

Tomemos ahora una capa de un medio II que separa dos medios, I y III, ambos infinitos.



La figura representa que en x=0 hay reflexión al medio I (P_r) y transmisión al medio II (P_a), y que en x=L la P_a se transmite (P_t) y se refleja (P_b), volviendo a transmitirse esta última al medio I y a reflejarse al medio II. En resumen, están representadas las 4 ondas en equilibrio (situación estacionaria) resultantes de todo el proceso de transmisiones y reflexiones desde P_i.
Tanto en x=0 como en x=L debe haber continuidad de presión acústica, así como continuidad de velocidad de partícula. Consecuentemente,

$$\frac{p_i + p_r}{u_i + u_r} = \frac{p_a + p_b}{u_a + u_b}$$

que indica que hay continuidad de la impedancia acústica en x=0. Sustituyendo las velocidades por sus expresiones en forma de $\frac{p}{r}$, queda

$$\frac{P_i + P_r}{P_i - P_r} = \frac{r_2}{r_1} \frac{P_a + P_b}{P_a - P_b}$$

Para $x = L$,

$$\frac{P_a e^{-jk_2 L} + P_b e^{jk_2 L}}{P_a e^{-jk_2 L} - P_b e^{jk_2 L}} = \frac{r_3}{r_2}$$

y como $R = \frac{P_v}{P_i}$,

$$R = \frac{(1 - r_1/r_3)\cos(k_2 L) + j(r_2/r_3 - r_1/r_2)\sin(k_2 L)}{(1 + r_1/r_3)\cos(k_2 L) + j(r_2/r_3 + r_1/r_2)\sin(k_2 L)}$$

De esta ecuación se deduce el desfase entre la onda reflejada y la incidente.
En el caso de $r_1 \equiv r_3$, y como $T_I = 1 - |R|^2$,

$$T_I \simeq \left(\frac{2r_1}{r_2 k_2 l}\right)^2 \qquad TL \simeq 10 \log\left(\frac{1}{T_1}\right)$$

Así, concluimos que:

- La pérdida por transmisión es 6 dB más cuando se duplica el espesor de la pared (*Ley de Masas*), y también se pierden 6 dB más cuando se duplica la frecuencia de la onda incidente (*Ley de Frecuencias*).
- En el caso de paredes sólidas en el agua, cuando $\frac{r_2}{r_1}\sin(k_2 L) \ll 1 \Rightarrow T_I \simeq 1$, es decir, hay transm. total.
- Si $r_2 > r_1$, $r_2 > r_3$, pero el medio II es muy fino ($r_2 \sin(k_2 L) \ll 1$ y $\cos(k_2 L \simeq 1)$), queda que

$$T_I \simeq \frac{4 r_1 r_3}{(r_1 + r_3)^2}$$

- Para $k_2 L = n\pi$, se repite el resultado anterior, reduciéndose notablemente la pérdida por transmisión.

4.1.3 Medida y valoración del aislamiento acústico entre locales (para Práctica de aislamiento)

Coeficiente de transmisión y pérdida por transmisión

$$\tau(\phi, \omega) = \frac{W_{trans}(\phi, \omega)}{W_{inc}(\phi, \omega)}$$

$$R(\phi, \omega) = 10 \log \frac{1}{\tau(\phi, \omega)}$$

Normas ISO para medida del aislamiento acústico Las normas que, concretamente, establecen las condiciones de medida y expresión de los resultados son las ISO 140-3 (condiciones de laboratorio), ISO 140-4 (medidas "in situ") y la ISO 717-1 para la expresión de los resultados mediante un único índice.

4.2 Atenuación de ondas sonoras por absorción atmosférica

Cuando una onda sonora viaja a través de un medio, toda la energía acústica se transforma, en última instancia, en energía térmica. Esta disipación puede producirse por distintos motivos (viscosidad, conducción calorífica y relajación molecular), y los mecanismos de absorción pueden ser tanto intramoculares como intermoleculares.
En la ecuación de estado $p = \rho_0 c^2 s$ no se tienen en cuenta las pérdidas en la propagación, pero pueden introducirse permitiendo un *retardo* entre la aplicación de la presión y el establecimiento de la condensación. Se obtiene una solución de la ecuación de onda modificada, de forma

$$p = P_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - kx})$$

Para la intensidad,

$$I = \frac{(P_0 e^{-\alpha x})^2}{2\rho_0 c} = I(0) e^{-j2\alpha x}$$

El coeficiente de atenuación ($\alpha = \frac{1}{x}$) se expresa en *nepers por metro*, siendo el *neper* una unidad adimensional. El cambio en el *nivel de intensidad* (en dB), es

$$\text{NIS}(0) - \text{NIS}(x) = 10 \log \frac{I(0)}{I(x)} = 10 \log e^{2\alpha x} = 8,7\alpha x = ax \qquad (\text{a en } \frac{\text{dB}}{\text{km}})$$

Este α es muy sensible a la variación de frecuencia, pero no lo es tanto con la de humedad o presión.

Problemas Tema 4: Sonido y audición. Medida del sonido: dB y dBA

1. Una onda armónica plana viaja en el agua e incide perpendicularmente sobre la superficie de separación entre agua y hielo. Se supone que ambos medios (agua y hielo) son de extensión infinita. Las densidades del agua y hielo son de 1000 y 920 kg/m^3 , respectivamente. Las velocidades de propagación de ondas acústicas en agua y hielo son 1480 y 3200 m/s, respectivamente. Hallar:

   (a) Coeficiente de reflexión de amplitud de desplazamiento
   (b) Coeficiente de transmisión de amplitud de desplazamiento.
   (c) Coeficiente de reflexión de amplitud de velocidad de partícula
   (d) Coeficiente de transmisión de amplitud de velocidad de partícula
   (e) Coeficiente de reflexión de amplitud de presión
   (f) Coeficiente de transmisión de amplitud de presión
   (g) Coeficiente de reflexión de potencia sonora
   (h) Coeficiente de transmisión de potencia sonora

2. Resolver las mismas cuestiones del problema anterior, pero suponiendo ahora que la onda viaja en el hielo e incide perpendicularmente sobre la superficie de separación del agua. ¿Se mantiene constante alguno de los coeficientes?

3. Una onda sonora armónica plana se propaga en un medio de impedancia r_1. Incide normalmente sobre otro medio de impedancia $r_2 = 4r_1$. Hallar la amplitud de presión acústica en el medio 1 a distancias $\lambda/4$ y $\lambda/2$ a la izquierda de la superficie de separación. Repetir el problema si $r_1 = r_2$.

4. Ondas sonoras planas viajando en aire inciden normalmente sobre la superficie de separación con otro fluido de impedancia desconocida. Si se refleja la mitad de la energía sonora incidente, ¿Cuánto vale la impedancia de este segundo medio?. Con los datos del problema, ¿Podemos conocer la velocidad de propagación del sonido en el segundo medio?

5. Una onda armónica plana propagándose en aire incide normalmente sobre una placa de acero de 1 cm de espesor, pasando nuevamente a aire. Si la frecuencia de la onda es 2 kHz, hallar la pérdida por transmisión a través de la placa de acero. La densidad del acero es de 7700 kg/m^3 y la velocidad de propagación de ondas acústicas es de 5050 m/s. Resolver la misma cuestión cuando se sustituye el aire por agua.

6. Una fuente acústica omnidireccional emite con la potencia espectral (en bandas de octava) recogida en la tabla.

   Suponiendo que el suelo es totalmente absorbente, hallar el NPS (en bandas y global con ponderación A) a 200 metros de distancia de la fuente. La temperatura es de 10ºC y la humedad relativa del 50%.

Freq. (Hz)	62.5	125	250	500	1000	2000	4000	8000	
Pot. (W)	0,15								
I (200m)	$2,98 \cdot 10^{-7}$								
NPS (200m)	54,2	57	57,8	59	58,4	57,8	57	53	
Δ (200m)	0,032	0,1	0,21	0,38	0,85	2,62	9,34	31	
NPS' (200m)	54,7	56,9	57,5	58,6	57,6	55,1	47,6	22	64,8 dB
Red A	-26,2	-16	-8,6	-3,2	0	1,2	1	-1,1	
NPS' /A	26,5	40,8	48,9	55,4	57,6	56,3	48,6	20,9	61,8 dBA

7. Por un tubo cilíndrico de sección A se propaga una onda acústica plana de longitud de onda muy superior al diámetro del tubo. El tubo tiene un cambio brusco de sección en un punto, conectándose en el mismo a otro tubo de sección mitad de la anterior. Hallar los coeficientes de reflexión y transmisión de potencia sonora.

8. Una onda armónica plana propagándose en aire incide normalmente sobre otro medio, transmitiéndose un 75% de la intensidad acústica incidente. Si la amplitud de velocidad de partícula de la onda incidente es de 12,05 mm/s:

   (a) Hallar las amplitudes de presión de las ondas reflejadas y trasmitidas.

   (b) Hallar la amplitud de presión de la onda resultante en el medio incidente (aire) en 4 $x = -\frac{3\lambda}{4}$.

5 Radiación de ondas acústicas

Introducción

Un altavoz es un *transductor mecano-acústico* diseñado para radiar energía acústica en el aire. Es el último eslabón en la cadena de conversión de señales eléctricas (procedente del amplificador) en señales acústicas (que no son más que variaciones de presión que el altavoz entrega finalmente al medio).
Para que el altavoz tenga una reproducción de alta fidelidad, es necesario tener en cuenta que el medio reacciona sobre la superficie vibrante del diafragma con un efecto de *carga acústica* (función de la frecuencia de la señal y de la geometría del altavoz). El diseño de un altavoz debe contemplar tanto la acción del mismo sobre el medio, como la reacción de este sobre el altavoz para una reproducción fiel. Por lo general, las características de la emisión (*patrones o diagramas de emisión*) son complejas y con características directivas fuertemente dependientes de la frecuencia.
Las características de emisión pueden obtenerse a partir de la emisión de una esfera pulsante (modelo teórico de fuente puntual) con arreglos de complejidad creciente: dipolo acústico, fuente lineal, pistón circular, etc. No obstante, unas pocas características pueden bastar para saber si un altavoz es adecuado para una aplicación particular.

Radiación de una esfera pulsante

Supongamos una esfera de radio a, variable en el tiempo de forma armónica: $r = a + r' \cos(\omega t)$. La superficie esférica exterior, en contacto con el aire, transmite una onda acústica divergente: $p(r,t) = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)}$. La impedancia será $z = \frac{p}{u} = \rho_0 c \cos(\phi) e^{j\phi}$ y $u = U_0 e^{j\omega t}$.
Impongamos la siguiente condición de contorno: velocidad de la superficie de la esfera igual a u (en $r = a$):

$$u(a,t) = \frac{p(a,t)}{z(a)} = \frac{\frac{A}{a} e^{j(\omega t - ka)}}{\rho_0 c \cos(\theta_a) e^{j\theta_a}} = U_0 e^{j\omega t}$$

Continuando con el desarrollo matemático, obtenemos

$$p(r,t) = \rho_0 c U_0 \frac{a}{r} \cos(\theta_a) e^{j[\omega t - k(r-a) + \theta_a]}, \quad \forall r : r > a$$

En cuanto a la intensidad acústica, tenemos que

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c U_0^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos^2(\theta_a)$$

Observamos que la intensidad no depende del ángulo de emisión.
Para longitudes de onda mucho mayores que el radio de la fuente, es decir, **para $ka \ll 1$**, la intensidad es:

$$I \simeq \frac{1}{2} \rho_0 c U_0^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 (ka)^2$$

Intensidad que depende del cuadrado de la frecuencia y de la cuarta potencia del radio de la fuente. Las fuentes pequeñas (con respecto a una λ) son, inherentemente, malos radiadores de energía acústica.

Poder de una fuente

Aunque una fuente simple pequeña no sea una esfera pulsante, si su superficie exterior vibra con una sola frecuencia puede simplificarse el cálculo de conjuntos de fuentes más complejos con el concepto de "poder". Supongamos que la velocidad instantánea de un punto en su superficie venga dada por:

$$\vec{u}(r,t,\phi) = \vec{u}(\vec{r})e^{j(\omega t+\phi)}$$

La fuente desplazará un volumen de fluido con la rapidez:

$$Qe^{j\omega t} = \int_S (\vec{u}\cdot\vec{n})dS \qquad \rightarrow \text{Para una esfera pulsante, } Q = 4\pi a^2 U_0$$

La importancia de este concepto estriba en que para una fuente simple (dimensiones mucho menores que la longitud de onda radiada) los detalles del movimiento de la superficie no son importantes y radia la misma energía que cualquier fuente simple con el mismo poder de fuente.
El resultado es más interesante cuando se estudian fuentes acústicas más complejas (fuente lineal, pistón circular, etc.), ya que para el campo acústico lejano la presión acústica puede escribirse (en la forma más general) como $P(r,\theta,\phi) = P_{ax}(r)\cdot H(\theta,\phi)$

Factor direccional y patrón de emisión

Como hemos visto anteriormente, la presión en el campo lejano, para todas las fuentes, se puede expresar en la forma:

$$P(r,\theta,\phi) = P_{ax}(r)\cdot H(\theta,\phi)$$

donde $\mathbf{H}(\theta,\phi)$ es el llamado ***factor direccional***, el cual se normaliza a la unidad (valor máximo) en el eje acústico. Se define como **patrón de emisión**, $\mathbf{b}(\theta,\phi)$, a la variación del nivel de intensidad con la dirección definida por los ángulos θ y ϕ:

$$b(\theta,\phi) = 10\log\frac{I(r,\theta,\phi)}{I_{ax}(r)} = 20\log H(\theta,\phi)$$

$P_{ax}(r)$ es la presión acústica en campo lejano en el eje acústico; la presión a lo largo de cualquier otra línea radial es $P_{ax}(r)$ reducida por el factor $H(\theta,\phi)$

Amplitud de emisión

Es el valor de los ángulos θ y ϕ que acen que la relación $I(\theta,\phi)/I_{ax}(r)$ sea un valor determinado. Suelen usarse las relaciones: 0.5 (3 dB por debajo del máximo), 0.25 (6 dB por debajo) y 0.1 (10 dB por debajo). El más usado es el segundo. Incluso en este caso, la mayor parte de la energía acústica es emitida dentro de la abertura indicada por la amplitud de emisión.

Sensibilidad o nivel de fuente

La **sensibilidad** expresa el NPS en el eje acústico (eje del altavoz) a 1 metro cuando se alimenta el altavoz con 1 watio eléctrico y en una frecuencia de trabajo.
El **rendimiento** es la potencia acústica emitida dividida entre la potencia eléctrica suministrada.
Es fácil probar que la sensibilidad de una fuente omnidireccional con rendimiento del 100% es de 109 dB. Este no es un límite superior para la sensibilidad, puesto que una fuente muy directiva puede concentrar casi toda la energía en un lóbulo muy estrecho del eje acústico, pero sí es un límite para bajas y medias frecuencias.

Directividad

Calculando la potencia total radiada a través de la integración sobre una esfera de radio r de la intensidad de la presión acústica producida por una fuente, y después aplicando que $P(r,\theta,\phi) = P_{ax}(r) \cdot H(\theta,\phi)$, nos queda la siguiente expresión de la potencia:

$$\Pi = \frac{1}{2\rho_0 c} r^2 P_{ax}^2 \int_{4\pi} H^2 d\Omega$$

Si la fuente es omnidireccional ($H(\theta,\phi) = 1$), la potencia va en función de la presión a la distancia *r:*

$$\Pi = \frac{1}{2\rho_0 c} 4\pi r^2 P_s^2(r)$$

Definimos la **directividad** como la relación entre la intensidad en el eje y la de una fuente omnidireccional que emite la misma potencia acústica. Es una magnitud escalar, y siempre $D > 1$.

$$D = \frac{I_{ax}(r)(\textit{direccional})}{I_s(r)(\textit{omnidireccional})} = \frac{P_{ax}^2(r)}{P_s^2(r)} = [(\textit{operando y cancelando términos})] = \frac{4\pi}{\int_{4\pi} H^2(\theta,\phi) d\Omega}$$

Así, la **potencia** y la **sensibilidad** se pueden escribir ahora como:

$$\Pi = \frac{4\pi}{D} \frac{P_e^2(1\ \text{m})}{\rho_0 c}$$

$$S = 10 \log \frac{D \rho_0 c \Pi_{1\text{W}e}}{4\pi P_{\text{ref}}^2}$$

Dentro de estas dos fórmulas, en la primera Π representa la potencia acústica de la fuente.
En la segunda, $\Pi_{1\text{W}e}$ es la potencia acústica emitida por la fuente cuando se alimenta con 1 W eléctrico.

Índice de directividad

Es la expresión, en dB, de la directividad:

$$\text{ID} = 10 \log D$$

Por ejemplo, para la esfera pulsante $H(\theta,\phi) = 1$, luego $D = 1$ y $ID = 0$.
Es fácil probar que, en el aire y con $P_{ref} = 20\mu\text{Pa}$, se tiene

$$S = 10 \log \Pi_{1We} + ID + 109 \text{ (en dB)}$$

Problemas Tema 5: Radiación de ondas acústicas

1. Hallar la sensibilidad de una fuente omnidireccional con rendimiento del 5%.

2. Cuando se alimenta a un altavoz omnidireccional con 5 vatios de potencia eléctrica, el NPS en el eje acústico a 10 metros de distancia es de 86 dB. Hallar el rendimiento y sensibilidad de dicho altavoz.

3. Se alimenta a un altavoz con una potencia eléctrica de 100 vatios. El rendimiento de este altavoz es del 4%. A 5 metros de distancia, en el eje acústico, el nivel de presión sonora (ref. 20 μPa) es de 112 dB. ¿Cuánto vale el índice de directividad de este altavoz?

   SOLUCIÓN: ID=16dB

   MÉTODO RÁPIDO: NPS(1m)=NPS(6m)+20log6=112+16=128 dB

4. Un altavoz omnidireccional posee una sensibilidad de 89 dB.

   (a) Hallar el NPS a 20 metros si se alimenta al altavoz con 50 vatios de potencia eléctrica.

   (b) Si el altavoz (con sensibilidad de 89 dB) no fuera omnidireccional y su índice de directividad fuera igual a 6 dB, ¿Cuánto valdría el NPS a 20 metros (en el eje acústico) si se alimenta al altavoz con 50 vatios de potencia eléctrica?.

5. Una fuente sonora emite al aire libre una onda esférica amortiguada con el tiempo de potencia $\Pi = \Pi_0 e^{-\alpha t}$ siendo $\Pi_0 = 10^{-4}$ W y $\alpha = 0,1$. Calcular:

   (a) la intensidad a una distancia de 5 m de la fuente

   (b) después de cuánto tiempo deja de oírse la oscilación a la distancia anterior, si la intensidad a la que deja de percibirse el sonido (intensidad umbral) es de $10^{-12}\text{W}/\text{m}^2$.